

## 基于多响应频响函数的加筋壁板结构模型修正

展铭<sup>1</sup>, 郭勤涛<sup>1</sup>, 岳林<sup>1</sup>, 张保强<sup>2</sup>

- (1. 南京航空航天大学机电学院, 江苏南京, 210016;
2. 厦门大学航空航天学院, 福建厦门, 361005)

**摘要:** 针对有限元模型中结构特征的简化以及连接界面的处理给分析结果引入的误差, 提出一种基于多响应频响函数的模型修正方法。简要介绍基于频响函数模型修正的基本原理, 并以复杂加筋壁板结构为对象进行实例研究。首先, 建立加筋壁板的各子结构模型, 并采用连接单元将子结构模型组装成整体结构模型。其次, 对加筋壁板结构进行动态测试与分析, 根据对应的试验结果对模型中的材料参数、连接参数以及模态阻尼比进行修正。最后, 分别对比修正前后结构的模态频率、频响函数, 检验修正后模型的精度。研究表明: 经过修正后的加筋壁板结构能复现用于修正的多响应频响函数, 得到1个能同时反映结构加速度和应变特性的模型, 从而验证了所提方法的有效性。

**关键词:** 加筋壁板; 模型修正; 频响函数; 多响应

中图分类号: TH113;O327

文献标志码: A 开放科学(资源服务)标识码(OSID)

文章编号: 1672-7207(2020)05-1228-06



## Finite element model updating of stiffened structure based on multi frequency response functions

ZHAN Ming<sup>1</sup>, GUO Qintao<sup>1</sup>, YUE Lin<sup>1</sup>, ZHANG Baoqiang<sup>2</sup>

- (1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** In view of the errors caused by the simplification of structural features and treatment of joint interfaces in the modeling phase, a finite element model updating method based on multi frequency response functions was proposed. The basic principle of model updating based on frequency response function was introduced and a case study of complex stiffened structure was carried out. The stiffened structure was divided into several substructures and meshed sequentially, and then substructures were connected utilizing joint elements. Dynamic test was conducted and frequency response function of acceleration and strain was obtained. Model parameters such as material properties, joint characteristics and modal damping ratios were calibrated based on the experimental frequency response functions. In the end, modal frequencies, frequency response functions before and after updating were compared to verify the precision of updated model. The results show that the updated model can

收稿日期: 2019-08-27; 修回日期: 2019-11-28

基金项目(Foundation item): 国家自然科学基金资助项目(51505398, U1530122) (Projects (51505398, U1530122) supported by the National Natural Science Foundation of China)

通信作者: 郭勤涛, 博士, 副教授, 从事有限元模型修正及确认研究; E-mail: guo\_qintao@nuaa.edu.cn

reproduce the multi frequency response functions used in the updating phase, and a model that can reflect acceleration and strain characteristics simultaneously is obtained.

**Key words:** stiffened structure; model updating; frequency response function; multi response

在土木、机械、航空航天、武器装备等领域的工程结构中,有限元建模和分析技术得到越来越多的应用,并逐渐成为理论分析和试验测试后的另一大支柱<sup>[1-2]</sup>。虽然有限元技术在工程实践中十分普及,但是随着工程结构的复杂化,在有限元建模过程中,局部细节简化和边界条件处理等不可避免地会使分析结果与结构真实测试结果之间存在差异。将有限元分析结果用于结构设计或工程决策的前提是有限元模型具有足够的精度,即所建立的模型能够准确反映结构的输入和输出之间的关系。因此,在诸如上述的工程领域中,根据结构测试的试验数据对有限元模型进行修正,可以提高有限元模型反映结构特性的能力,并将修正后的有限元模型用于结构优化设计、结构损伤识别、状态监测和结构响应预示等<sup>[3]</sup>。大量学者对有限元模型修正的关键问题进行了研究,并取得了丰硕的研究成果。在模型修正前,首先需要对模型中的参数进行筛选,ZANG等<sup>[4]</sup>采用等效单元模态应变能和等效单元模态动能选择模型修正中误差的敏感参数。万华平等<sup>[5]</sup>基于全局灵敏度分析方法,提出了有限元模型修正待修正参数选择的新方法。经过实践验证,待修正响应信息对有限元模型修正过程、修正后模型的精度以及修正后模型的用途具有重要的影响。REN等<sup>[6]</sup>基于结构静态试验测试结果修正了结构中的未知参数。THONON等<sup>[7]</sup>采用模态频率和模态置信度作为修正目标,实现了梁结构的模型修正。XIAO等<sup>[8]</sup>采用模态频率和影响线作为目标修正了斜拉桥的多尺度有限元模型。张保强等<sup>[9]</sup>使用模态频率和有效模态质量作为结构动力学模型修正的目标,实现了复杂边界梁模型的修正。ESFANDIARI<sup>[10]</sup>利用共振区附近的应变传递函数修正了二维桁架结构。JAISHI等<sup>[11]</sup>采用模态频率及模态应变能残差,基于多目标优化算法修正了简支梁及箱型梁结构的有限元模型。GUO等<sup>[12]</sup>通过定义应变频响函数的相关性,修正了结构的材料属性。姜东等<sup>[13]</sup>基于模态试验参数修正了蜂窝夹层复合材料有限元模型中的不确定性参数。郭铁能等<sup>[14]</sup>研究了应用频响函

数辨识结合部参数的方法,并基于三自由度弹簧质量系统验证了方法的有效性。LINK等<sup>[15]</sup>将模态参数和时域响应作为目标响应,基于模型修正方法对复合板结构中的损伤进行了识别。针对复杂结构模型修正过程计算成本过高的问题,曹文斌等<sup>[16]</sup>以某型航天结构为例,基于代理模型以及二级优化策略实现了有限元模型修正过程。JUNG等<sup>[17]</sup>通过分层模型校准方法,提高了电机有限元模型的预测能力。XIONG等<sup>[18]</sup>对有限元模型修正方法进行了总结,通过最大似然估计确定模型中随机参数的分布特征。MODAK等<sup>[19]</sup>对模型修正方法进行了比较,认为不同类型的模型修正方法各具优势,在工程应用时需要酌情选取。从上述的文献可知,目前常用的有限元模型修正方法中,采用的响应主要包括静力学响应、模态参数、加速度时频域响应等。静力学响应、结构整体模态参数等对于结构中局部连接参数的灵敏度较低。此外,采用模态参数作为修正目标,要求试验能够精确测量多阶模态,并且对阻尼参数的修正效果通常不理想。本文作者采用复杂加筋壁板结构为研究对象,联合加速度和应变频响函数对模型中的材料参数、连接参数以及模态阻尼比进行修正,并对修正后的模型进行检验。

## 1 基于频响函数的模型修正

### 1.1 模型修正方法

有限元模型修正的基本思想是通过调整模型中的参数达到缩小有限元分析与结构试验测试之间的差距的目的,本质上是一个力学反问题,并表示为如下数学形式:

$$\begin{aligned} \min & \left\| \mathbf{W}_r \mathbf{R}(\mathbf{X}) \right\|^2, \mathbf{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{R}_A(\mathbf{X}) - \mathbf{R}_E \\ \text{s.t. } & \mathbf{X}_{lb} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{ub} \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{X}$ 为待修正参数; $\mathbf{X}_{lb}$ 和 $\mathbf{X}_{ub}$ 分别为其下限和上限; $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ 为响应残差; $\mathbf{R}_A(\mathbf{X})$ 和 $\mathbf{R}_E$ 分别为有限元分析响应以及试验测试响应; $\mathbf{W}_r$ 为残差的加权系数。

## 1.2 多响应频响函数分析方法

在有限元分析时,通常将结构离散为多自由度系统,其动力学方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{K}$  分别为质量、阻尼和刚度矩阵;  $\mathbf{X}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  和  $\ddot{\mathbf{X}}(t)$  分别为位移、速度及加速度向量;  $\mathbf{F}(t)$  为激励力向量。

对上述动力学方程进行变换,引入模态坐标对方程组进行解耦,根据模态叠加原理可得在任意坐标下结构的位移响应为

$$\mathbf{X} = \sum_{r=1}^N \frac{\boldsymbol{\phi}_r^T \boldsymbol{\phi}_r}{-\omega^2 M_r + j\omega C_r + K_r} \mathbf{F}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\boldsymbol{\phi}_r^T \boldsymbol{\phi}_r}{-\omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \omega + \omega_r^2} \mathbf{F}(\omega) = \mathbf{H}_d(\omega) \mathbf{F}(\omega) \quad (3)$$

式中:  $\boldsymbol{\phi}_r$  为第  $r$  阶模态振型向量;  $N$  为模态截断的总阶次;  $M_r$ ,  $C_r$  和  $K_r$  分别为模态质量、模态阻尼

及模态刚度;  $\omega_r = \sqrt{\frac{K_r}{M_r}}$ , 为第  $r$  阶模态频率;  $\zeta_r =$

$\frac{C_r}{2M_r\omega_r}$ , 为第  $r$  阶模态阻尼比;  $\mathbf{H}_d(\omega)$  为位移的频率响应函数。

根据有限元理论中的应变和位移之间的关系以及上述位移响应表达式,通过坐标变换等过程可得结构中任一节点处的应变响应为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ni}}^e = \sum_{r=1}^N \frac{\boldsymbol{\psi}_r^T \boldsymbol{\phi}_r}{-\omega^2 M_r + j\omega C_r + K_r} \mathbf{F} = \mathbf{H}_e(\omega) \mathbf{F}(\omega) \quad (4)$$

式中:  $\boldsymbol{\psi}_r$  称为第  $r$  阶应变模态振型;  $\mathbf{H}_e(\omega)$  为应变频响函数。

## 1.3 频响函数的相关性

假设有限元分析获得的结构关键点处的频响函数矩阵为  $\mathbf{H}_A$ , 试验的频响函数矩阵为  $\mathbf{H}_E$ 。借鉴评价模态振型相关性的概念,定义频响函数的相关系数描述仿真分析与试验测试结果之间相关性<sup>[20]</sup>:

$$\mathbf{R}_{\text{SAC}} = \frac{\left| (\mathbf{H}_A^i(X))^T \mathbf{H}_E^i \right|^2}{\left| (\mathbf{H}_A^i(X))^T \mathbf{H}_A^i(X) \right| \left| (\mathbf{H}_E^i)^T \mathbf{H}_E^i \right|} \quad (5)$$

$$\mathbf{R}_{\text{MAC}} = \frac{2 \left| (\mathbf{H}_A^i(X))^T \mathbf{H}_E^i \right|}{\left| (\mathbf{H}_A^i(X))^T \mathbf{H}_A^i(X) \right| + \left| (\mathbf{H}_E^i)^T \mathbf{H}_E^i \right|} \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{H}_A^i(X)$  和  $\mathbf{H}_E^i$  分别为仿真分析和试验测试频响函数矩阵在频率点  $i$  处的列向量;  $\mathbf{R}_{\text{SAC}}$  和  $\mathbf{R}_{\text{MAC}}$  分

别为形状相关系数和幅值相关系数。

由两类相关系数的定义式可以看出,  $\mathbf{R}_{\text{SAC}}$  和  $\mathbf{R}_{\text{MAC}}$  分别是对频响函数矩阵中各频率点处的频响函数向量的形状相似程度和幅值一致程度的评价指标。基于频响函数相关系数的有限元模型修正目标函数可表示为

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \sum_{q=1}^K (1 - \mathbf{R}_{\text{SAC}}^q(\mathbf{X})) + (1 - \mathbf{R}_{\text{MAC}}^q(\mathbf{X})) \quad (7)$$

式中:  $\mathbf{R}_{\text{SAC}}^q(\mathbf{X})$  和  $\mathbf{R}_{\text{MAC}}^q(\mathbf{X})$  分别为频响函数的两类相关性在频率点  $q$  处的值;  $K$  为用于修正的频响函数频率点数。

## 2 加筋壁板结构建模及试验

### 2.1 加筋壁板结构建模

加筋壁板结构在航空航天等领域广泛使用,其动力学特性决定着结构在各个方面的研究进展。加筋壁板主要由基础板、夹持边以及筋条等零部件组成,各零部件之间通过螺栓或铆钉相连接。在有限元建模时,考虑到各零部件厚度相对于其余方向尺寸较小,采用板单元建立加筋壁板各零部件的模型。对于零部件之间的连接,采用弹簧阻尼单元描述。由于各零部件之间的连接方向不一,因此在建模时对弹簧阻尼单元按照连接方向进行分组,并分别赋予不同的属性值。将螺栓视为弹性杆件,根据材料力学对其轴向刚度进行近似计算,并将计算结果圆整后作为模型中参数的初值。此外,由于结构中的连接数量较多,为了减小其质量对结构响应计算的影响,在建模时采用集中质量单元描述螺栓的质量。加筋壁板结构的有限元模型如图1所示。

### 2.2 加筋壁板试验测试

在对加筋壁板进行试验前,首先对各零部件

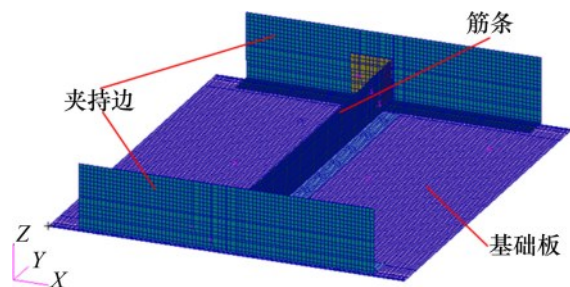


图1 加筋壁板结构有限元模型

Fig. 1 Finite element model of stiffened structure

进行组装, 并通过扭矩扳手控制螺栓的拧紧力矩, 保证同一方向的螺栓具有相同的拧紧力。试验时采用弹性绳将加筋壁板悬挂于刚性支架上, 通过激振器产生 0~200 Hz 的连续扫频信号对结构基础板施加垂向激励。采用动态信号采集仪, 同时记录激励力信号以及基础板上测点处的加速度和应变信号。随后基于信号处理方法获得各测点处加速度及应变频响函数信息。加筋壁板试验测试激励点及响应测点分布如图 2 所示, 其中, C1 为激励点, 激励方向垂直于基础板; A1~A5 为加速度测点, 方向垂直于基础板; S1~S6 为应变测点, 其中 S1~S2 以及 S5~S6 测试方向沿 Y 向, S3~S4 测试方向沿 X 向。

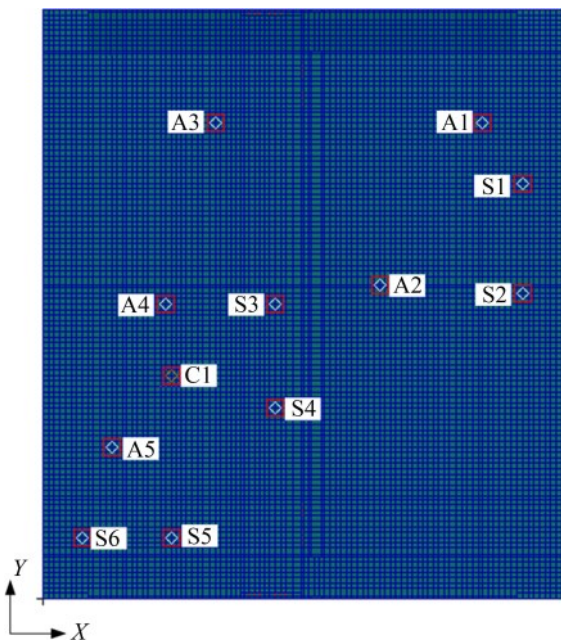


图 2 加筋壁板结构试验测点

Fig. 2 Test point of stiffened structure

### 3 加筋壁板结构模型修正

正如建模部分所述, 加筋壁板模型中存在多组未知参数, 本文采用多响应频响函数对模型中参数进行修正, 一方面, 可以避免模态参数识别引起的误差, 另一方面, 频响函数上可用于修正的信息更多。在对加筋壁板结构模型修正前, 首先采用灵敏度分析方法对模型中参数进行筛选, 确定结构基础板与夹持边连接的 Z 向平动刚度  $K_{n1}$  以及 X 和 Y 向转动刚度  $K_{rx1}$  和  $K_{ry1}$ 、基础板与筋条连接的 Z 向平动刚度  $K_{n2}$  以及 Y 向转动刚度  $K_{ry2}$ 、结构

前 6 阶模态的阻尼比  $\xi_1 \sim \xi_6$  为待修正参数。在模型修正时, 选取频响函数各共振峰的半功率带宽点以及相邻共振峰的峰值间距的中点作为目标频率点, 分别计算加速度和应变频响函数的两类相关系数, 基于式(7)构造用于修正的目标函数。采用遗传算法对所构造的目标函数进行优化, 从而获得待修正参数合理空间内的最优组合。加筋壁板模型修正各待修正的初值、修正值如表 1 所示。分别基于修正前后的模型参数计算加筋壁板结构的模态频率, 并与试验测试结果比较, 其各阶频率的误差如表 2 所示。

表 1 加筋壁板模型修正参数

Table 1 Updating parameters of stiffened structure

参数	初始值	修正值
$K_{n1}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	5 000	1 285.71
$K_{rx1}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	1 000	1 031.75
$K_{ry1}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	1 000	1 539.68
$K_{n2}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	10 000	8 742.85
$K_{ry2}/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	2 000	4 028.57
$\xi_1/\%$	1.00	0.81
$\xi_2/\%$	1.00	1.95
$\xi_3/\%$	1.00	0.92
$\xi_4/\%$	1.00	0.65
$\xi_5/\%$	1.00	0.59
$\xi_6/\%$	1.00	1.29

表 2 修正前后的模态频率对比

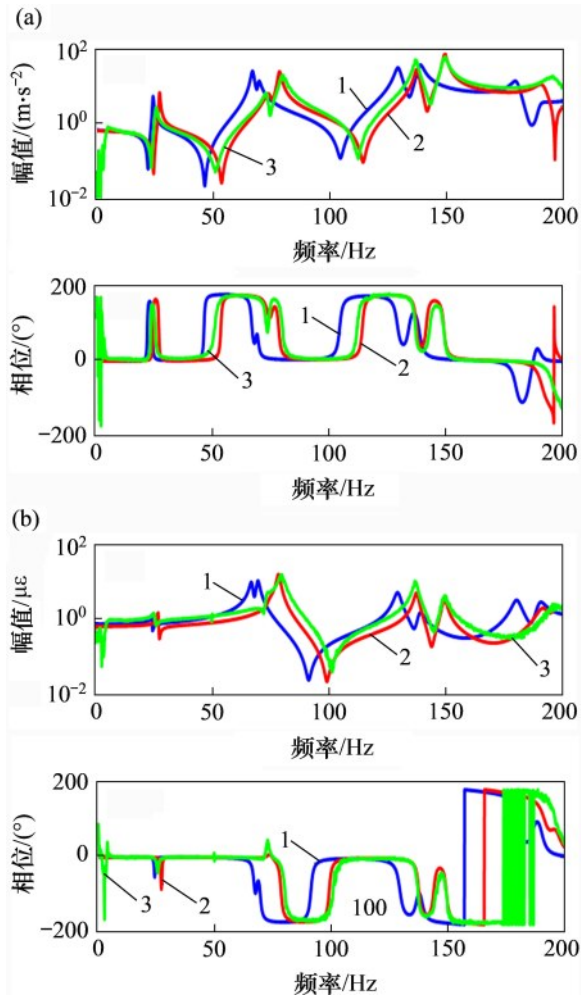
Table 2 Modal frequency before and after updating

模态阶次	试验值/Hz	初始值/Hz	初始误差/%	修正值/Hz	修正误差/%
1	25.63	23.73	-7.41	26.08	1.76
2	73.25	65.57	-10.48	74.02	1.05
3	79.87	66.70	-16.49	78.46	-1.77
4	136.60	136.97	0.27	137.47	0.64
5	149.42	139.97	-6.32	149.35	-0.05
6	198.33	179.36	-9.56	191.49	-3.45
绝对平均误差/%			8.42		1.45

从表 2 可知: 在模型修正前各阶频率误差最大值为 -16.49%, 绝对平均误差为 8.42%; 经过模型修正后, 各阶频率误差最大值为 -3.45%, 绝对平均误差为 1.45%。故经过模型修正, 结构模态频率误差得到有效减小。

分别基于修正前和修正后的待修正参数值计

算加筋壁板结构试验测试对应位置的多响应频响函数，并与试验测试结果比较。修正前后加速度测点 5 处的频响函数以及应变测点 4 处的频响函数与对应试验频响函数的对比如图 3 所示。



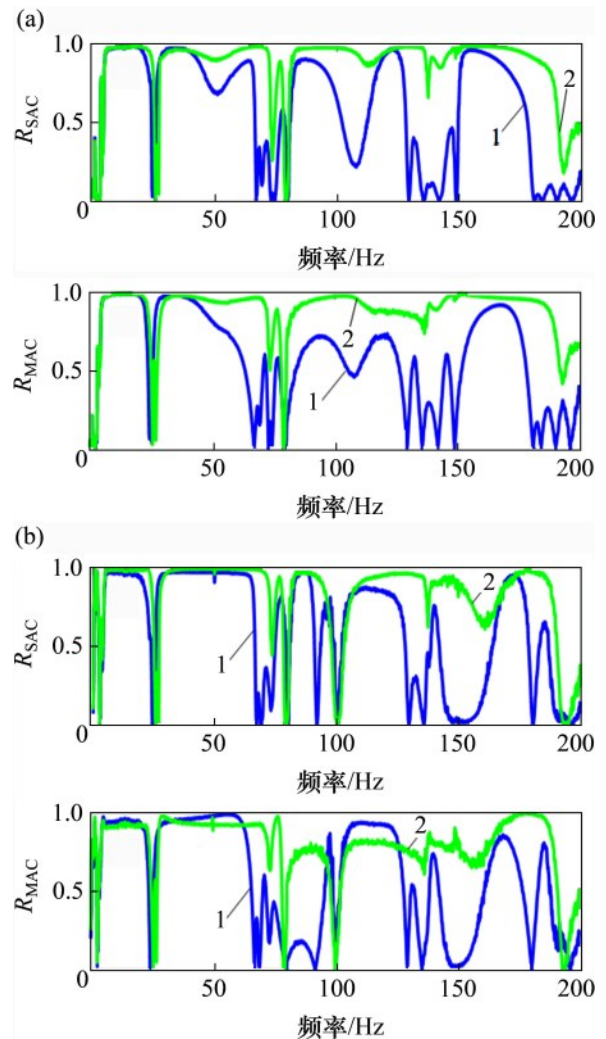
(a) 加速度频响函数；(b) 应变频响函数  
1—初始值；2—修正值；3—试验值。

图 3 修正前后多响应频响函数对比

Fig. 3 Comparison of multi response FRF

与修正前相比，修正后加速度频响函数的形状相关系数均值从 0.61 提高至 0.88，幅值相关系数均值从 0.59 提高至 0.88；应变频响函数的形状相关系数均值从 0.62 提高至 0.84，幅值相关系数均值从 0.59 提高至 0.79。修正前后加速度和应变频响函数的 2 类相关系数变化如图 4 所示。

由频响函数相关系数以及对应的曲线对比可知，修正后两类响应的频响函数的相关系数均得到有效改善。上述现象表明：修正后 2 类响应的频响函数更趋向于一致，即修正后模型更能表征结构真实的特性。



(a) 加速度频响函数相关系数；

(b) 应变频响函数相关系数

1—初始值；2—修正值。

图 4 修正前后多响应频响函数相关系数对比

Fig. 4 Correlation of multi response FRFs

## 4 结论

1) 采用频响函数作为目标响应可以为模型修正过程提供更丰富的响应信息，修正后模型能够准确表征结构的模态信息。

2) 联合多响应频响函数的模型修正得到的模型能够同时复现用于修正的目标响应，修正后的模型是一个能同时反映结构加速度和应变特性的模型。

3) 本文实现的联合多响应频响函数的加筋壁板结构模型修正具有较强的工程应用价值，为复杂工程结构的模型修正提供了可行的思路。

## 参考文献:

- [1] OBERKAMPF W L, ROY C J. Verification and validation in scientific computing[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010: 1-20.
- [2] FRISWELL M I, MOTTERSHEAD J E. Finite element model updating in structural dynamics[M]. Dordrecht, the Nether lands: Kluwer Academic Publishers, 1995: 115-118.
- [3] 张令弥. 计算仿真与模型确认及在结构环境与强度中的应用[J]. 强度与环境, 2002, 29(2): 42-47.
- ZHANG Lingmi. Computer simulation & model validation with application to strength and environment engineering[J]. Structure & Environment Engineering, 2002, 29(2): 42-47.
- [4] ZANG C, MA S C, FRISWELL M I. Structural model updating with an improved parameter selection method[C]// Proceeding of ISMA2012-USD 2012. Leuven, Belgium, 2012: 2227-2236.
- [5] 万华平, 任伟新, 王宁波. 高斯过程模型的全局灵敏度分析的参数选择及采样方法[J]. 振动工程学报, 2015, 28(5): 714-720.
- WAN Huaping, REN Weixin, WANG Ningbo. A Gaussian process model based on global sensitivity analysis approach for parameter selection and sampling methods[J]. Journal of Vibration Engineering, 2015, 28(5): 714-720.
- [6] REN Weixin, FANG Shengen, DENG Miaoyi. Response surface-based finite-element-model updating using structural static responses[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2011, 137(4): 248-257.
- [7] THONON C, GOLINVAL J C. Results obtained by minimizing natural frequency and MAC-value errors of a beam model[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2003, 17(1): 65-72.
- [8] XIAO X, XU Y L, ZHU Q. Multiscale modeling and model updating of a cable-stayed bridge. II: model updating using modal frequencies and influence lines[J]. Journal of Bridge Engineering, 2015, 20(10): 04014113.
- [9] 张保强, 陈国平, 郭勤涛. 基于模态频率和有效模态质量的有限元模型修正[J]. 振动与冲击, 2012, 31(24): 69-73.
- ZHANG Baoqiang, CHEN Guoping, GUO Qintao. Finite element model updating based on modal frequency and effective modal mass[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(24): 69-73.
- [10] ESFANDIARI A. Structural model updating using incomplete transfer function of strain data[J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(16): 3657-3670.
- [11] JAISHI B, REN Weixin. Finite element model updating based on eigenvalue and strain energy residuals using multiobjective optimisation technique [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, 21(5): 2295-2317.
- [12] GUO Ning, YANG Zhichun, JIA You, et al. Model updating using correlation analysis of strain frequency response function[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 70/71: 284-299.
- [13] 姜东, 吴邵庆, 费庆国, 等. 蜂窝夹层复合材料不确定性参数识别方法[J]. 振动与冲击, 2015, 34(2): 14-19.
- JIANG Dong, WU Shaoqing, FEI Qingguo, et al. Parameter identification approach of honeycomb sandwich composite with uncertainties[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(2): 14-19.
- [14] 郭铁能, 李玲, 蔡力钢, 等. 基于频响函数辨识机械结合部动态参数的研究[J]. 振动与冲击, 2011, 30(5): 69-72.
- GUO Tieneng, LI Ling, CAI Ligang, et al. Identifying mechanical joint dynamic parameters based on measured frequency response functions[J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(5): 69-72.
- [15] LINK M, WEILAND M. Damage identification by multi model updating in the modal and in the time domain[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(6): 1734-1746.
- [16] 曹文斌, 章敏, 罗寅, 等. 基于结构代理模型与二级优化策略的航天结构模型修正研究[J]. 计算力学学报, 2016, 33(2): 263-268.
- CAO Wenbin, ZHANG Min, LUO Yin, et al. Updating finite element dynamic models of aerospace structures based on surrogate model and 2-level optimization strategy[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2016, 33(2): 263-268.
- [17] JUNG B C, YOON H, OH H, et al. Hierarchical model calibration for designing piezoelectric energy harvester in the presence of variability in material properties and geometry [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, 53(1):161-173.
- [18] XIONG Ying, CHEN Wei, TSUI K L, et al. A better understanding of model updating strategies in validating engineering models[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198(15/16): 1327-1337.
- [19] MODAK S V, KUNDRA T K, NAKRA B C. Comparative study of model updating methods using simulated experimental data [J]. Computers & Structures, 2002, 80(5/6): 437-447.
- [20] LEE D, AHN T S, KIM H S. A metric on the similarity between two frequency response functions [J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 436: 32-45.

(编辑 杨幼平)