

正交各向异性功能梯度微板的自由振动行为

康泽天, 张岩, 周博, 薛世峰

(中国石油大学(华东) 储运与建筑工程学院, 山东 青岛, 266580)

摘要: 基于新修正偶应力理论, 利用哈密顿原理推导正交各向异性功能梯度 Kirchhoff 微板的控制微分方程和边界条件, 建立微板动力学模型, 并利用纳维解法对其进行求解。利用建立的模型, 对正交各向异性功能梯度四边简支微板的自由振动和受双向正弦分布横向载荷作用下的弯曲行为进行研究, 分析材料各向异性, 尺度参数与板厚比以及功能梯度参数对微板挠度、偶应力和前三阶固有频率尺度效应的影响。研究表明: 应用本文模型求解的微板挠度比经典弹性板理论解的小, 而其固有频率比经典弹性板理论解的大; 板厚与材料尺度参数比越小, 微板挠度、偶应力和固有频率的尺度效应越明显; 功能梯度参数对微板挠度、偶应力和固有频率的尺度效应有一定影响; 沿2个正交方向的材料尺度参数对微板挠度、偶应力和固有频率的尺度效应影响程度不同。

关键词: 正交各向异性; 功能梯度; 尺度效应; 能量法; 偶应力理论

中图分类号: TB34

文献标志码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID)

文章编号: 1672-7207(2020)05-1200-11



Free vibration behaviors of orthotropic functionally graded microplates

KANG Zetian, ZHANG Yan, ZHOU Bo, XUE Shifeng

(College of Pipeline and Civil Engineering, China University of Petroleum (East China), Qingdao 266580, China)

Abstract: Based on the new modified couple stress theory, the kinetic model, which includes the governing differential equations and boundary conditions of the Kirchhoff microplate was derived utilizing the Hamilton's principle. The dynamic differential equation was solved by the Navier method. According to the presented model, the free vibration of a four-sided simply supported microplate and its bending behavior under bidirectional sinusoidal distributed loads were studied. The effects of material anisotropy, the ratio of length scale parameters to the plate thickness and functionally graded parameters on the size effects of deflection, couple stress and the first three orders of natural frequency were analyzed. The results show that the solution of the deflection of the microplates are always smaller than the classical elastic plate solution, but the solution of the natural frequencies are always larger than the classical elastic plate solutions. The smaller the ratio of plate thickness to material length scale parameters is, the more obvious the size effects of the deflection, couple stress and natural frequency are. The

收稿日期: 2019-11-11; 修回日期: 2020-01-09

基金项目(Foundation item): 国家重点研发计划项目(2017YFC0307604) (Project(2017YFC0307604) supported by the National Key Research and Development Program of China)

通信作者: 周博, 教授, 博士生导师, 从事智能材料与结构力学、微尺度材料力学、油气井工程力学等研究; E-mail: zhoubo@upc.edu.cn

functionally graded parameter has specific impacts on the size effects of deflection, couple stress and natural frequency of the microplate. The length scale parameters in the two orthogonal directions have different effects on the scale effects of deflection, couple stress and natural frequency of the microplate.

Key words: orthotropic; functionally gradient; size effect; energy method; couple stress theory

功能梯度材料是材料组分或几何尺寸沿结构特定方向成连续梯度变化的一种新型功能材料,它具有消除应力集中、减小残余应力、增强连接强度、减小裂纹驱动力等许多普通均质材料不具备的优异性能^[1-3]。随着微电子技术的发展,功能梯度微结构的应用更加广泛,众多的微观实验发现并证实,当金属或复合材料构件的特征尺寸减小到一定范围时,其力学性能随着特征尺寸的改变而变化,表现出较强的尺度效应^[4-5]。为对该现象作出合理解释且方便建模,许多学者在弹性体的本构关系中引入与微观结构相关的特征尺度参数,提出偶应力理论用以描述材料力学行为的尺度依赖性。YANG等^[6]在偶应力理论基础上,提出了修正偶应力理论,该理论只引入1个长度尺度参数,简化了建模过程,更便于实际应用。ASGHARI等^[7]基于修正偶应力理论在线弹性范围建立了能够描述功能梯度 Timoshenko 微梁弯曲及自由振动尺度效应的力学模型。KE等^[8]基于修正偶应力理论分析了功能梯度 Timoshenko 微梁的动态稳定性问题。在修正偶应力理论的基础上,REDDY^[9]利用 Euler-Bernoulli 和 Timoshenko 梁理论,研究了功能梯度微梁的弯曲,自由振动和屈曲行为。DEHROUYEH-SEMNANI等^[10]基于修正偶应力理论,通过参数分析研究了微尺度梁剪切变形的尺度效应,并对微尺度梁的静弯曲、屈曲和自由振动等力学问题进行了研究。DAI等^[11]基于修正偶应力理论,考虑大变形和尺度效应,提出一种非线性模型描述悬臂微梁的共振特性。除此之外,许多专家学者对微板的力学行为的尺度效应进行了理论研究。TSIATAS^[12]基于修正偶应力理论和 Kirchhoff 板理论,建立了能够描述不同边界条件下任意边界形状微板静弯曲行为尺度效应的力学模型。KE等^[13-14]基于修正偶应力理论,研究了不同边界条件下 Kirchhoff 和 Mindlin 微板自由振动行为。THAI等^[15]基于3种不同板理论对功能梯度微板的弯曲,自由振动以及屈曲行为进行分析并探讨了材料尺度参数对板弯曲挠度,自振频率以及屈曲载荷的影响。LOU等^[16]考虑几何非线性,

基于修正偶应力理论提出一种能够描述功能梯度微板尺度效应的统一高阶板理论,并利用哈密顿原理推导了微板的控制方程和边界条件。随着材料科学的发展和实际工程需要,各向异性的功能梯度微结构的应用愈发广泛,针对其力学行为研究也得到青睐。CHEN等^[17]将偶应力理论推广到各向异性材料,提出了一种新修正偶应力理论,并基于该理论开展了一系列有关层合梁板结构弯曲、振动和稳定等问题的研究^[18-19]。贺丹等^[20-21]基于新修正偶应力理论,对平面正交各向异性功能梯度微梁和斜交铺设层合 Kirchhoff 微板的弯曲行为的尺度效应进行研究。YANG等^[22]基于新修正偶应力理论和虚功原理研究了正交各向异性功能梯度 Kirchhoff 微板在弯曲变形过程中挠度和正应力的尺度效应。上述研究均假设材料参数以幂指数形式变化,定性分析了各向异性和指数变化对微结构挠度、应力和固有频率尺度效应的影响。本文作者基于新修正偶应力理论和 Kirchhoff 板理论,定量研究材料参数沿板厚方向呈正弦梯度变化的正交各向异性简支微板的弯曲和自由振动行为,重点考察各向异性和功能梯度参数对微板挠度、偶应力和固有频率尺度效应的影响。本研究可为微电子机械系统(MEMS)中微结构的优化设计和力学分析提供理论基础和技术参考。

1 新修正偶应力理论

CHEN等^[17-19]提出新修正偶应力理论,并给出了弹性体应变分量 ε_{ij} 和曲率分量 χ_{ij} 的表达式为:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

$$\chi_{ij} = \omega_{i,j} \quad (2)$$

式中: u_i 为平动位移分量;

$$\omega_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \quad (3)$$

ω_i 为转动位移分量; e_{ijk} 为置换符号。

各向异性弹性体的本构关系可以描述为:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\epsilon_{kl} & (4) \\ m_{ij} &= l_i^2 G_i \chi_{ij} + l_j^2 G_j \chi_{ji} & (5) \end{aligned}$$

式中： C_{ijkl} 为弹性常数分量； σ_{ij} 为应力分量； m_{ij} 为偶应力分量； G_i 和 G_j 分别为2个正交方向的剪切模量； l_i 和 l_j 分别为2个正交方向的材料尺度参数。

2 微板动力学模型建立

2.1 基本变量描述

图1所示为正交各向异性微板示意图，其中： a 、 b 和 h 分别为微板的长度、宽度和厚度； xy 平面与微板的中面重合。根据Kirchhoff板假设，板的位移场为

$$\begin{cases} u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w = w(x,y,t) \end{cases} \quad (6)$$

式中： u 、 v 和 w 分别为板内任意一点沿 x 、 y 和 z 方向上的位移分量； u_0 和 v_0 分别为变形后板中面沿 x 和 y 方向上的位移； t 为时间。将位移分量表达式(6)代入几何方程式(1)，得到微板的非零应变分量为

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{cases} \quad (7)$$

将位移分量表达式(6)和转动位移表达式(3)代入曲率分量表达式(2)，得到微板的非零曲率分量为

$$\begin{cases} \chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \chi_{yx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{cases} \quad (8)$$

由式(4)可知本构关系可以表示为

$$\sigma = K \epsilon \quad (9)$$

式中：

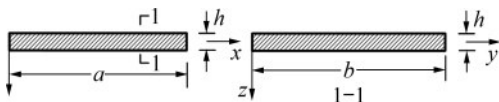


图1 正交各向异性微板示意图

Fig. 1 Schematic diagram of orthotropic microplate

$$\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \ m_x \ m_y \ m_{xy} \ m_{yx}]^T \quad (10)$$

和

$$\epsilon = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy} \ \chi_x \ \chi_y \ \chi_{xy} \ \chi_{yx}]^T \quad (11)$$

分别为应力列向量和应变列向量。刚度矩阵 K 中非零元素为

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{E_x(z)}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}; K_{22} = \frac{E_y(z)}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}; K_{33} = G_{xy}; K_{44} = \\ &2l_x^2(z)G_{xz}; K_{55} = 2l_y^2(z)G_{yz}; K_{66} = K_{76} = l_x^2(z)G_{xz}; \\ K_{77} &= K_{67} = l_y^2(z)G_{yz}; K_{12} = K_{21} = \frac{\mu_{xy}E_x(z)}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}. \end{aligned}$$

式中： μ_{xy} 和 μ_{yx} 分别为材料不同方向的泊松比； E_x 和 E_y 分别为材料沿 x 和 y 方向的弹性模量； G_{xy} 、 G_{xz} 和 G_{yz} 为材料不同方向的剪切模量； l_x 和 l_y 分别为材料沿 x 和 y 方向的特征尺度参数。

2.2 动力学微分方程

哈密顿原理亦称最小作用原理，表述为：受完整约束的有势系，在位形空间中，相同时间通过两位形点间的一切可能运动曲线中，真实运动曲线使作用量取极小值，即作用量的一阶变分为零，表示为

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (12)$$

式中：在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内微板虚动能为

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \delta (\partial \mathbf{u} / \partial t)^2 dV dt = \\ &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (h_1 \delta u_0 + h_2 \delta v_0 + h_3 \delta w) dx dy dt + \\ &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega} h_4 \delta w dl dt \end{aligned} \quad (13)$$

式中： ρ 为密度； \mathbf{u} 为板的平动位移； V 为体积； Ω 为中性面面积； $\partial \Omega$ 为其边界；系数 h_1 、 h_2 、 h_3 和 h_4 分别为

$$\begin{cases} h_1 = -m_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + m_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \\ h_2 = -m_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + m_1 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \\ h_3 = -m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m_1 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + \\ \quad m_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \\ h_4 = n_x \left(m_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right) + \\ \quad n_y \left(m_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \right) \end{cases} \quad (14)$$

式中: n_x 和 n_y 分别为中面边界外法线与 x 和 y 轴的夹角余弦,

$$(m_0, m_1, m_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2) dz \quad (15)$$

在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内微板虚应变能为

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_V (\sigma_y \delta \epsilon_y + m_y \delta \chi_y) dV dt = \\ &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (p_1 \delta u_0 + p_2 \delta v_0 + p_3 \delta w) dx dy dt + \\ &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega} (p_4 \delta u_0 + p_5 \delta v_0 + p_6 \delta w + p_7 \delta \frac{\partial w}{\partial x} + p_8 \delta \frac{\partial w}{\partial y}) dl dt \end{aligned} \quad (16)$$

式中:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}; p_2 = -\frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}; p_3 = -\frac{\partial^2 \tilde{M}_x}{\partial x^2} - \\ &\frac{\partial^2 \tilde{M}_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{M}_{xy}}{\partial x \partial y}; p_4 = n_x N_x + n_y N_{xy}; \\ p_5 &= n_y N_y + n_x N_{xy}; p_6 = -n_x \tilde{M}_x - n_y \tilde{M}_{xy}; p_7 = -n_y \tilde{M}_y - \\ &n_x \tilde{M}_{xy}; \\ p_8 &= n_x (\frac{\partial \tilde{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{M}_{xy}}{\partial y}) + n_y (\frac{\partial \tilde{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{M}_{xy}}{\partial x}) \tilde{M}_x = \\ M_x + Y_{yx}; \tilde{M}_y &= M_y - Y_{xy}; \tilde{M}_{xy} = M_{xy} + \frac{1}{2} (Y_y - Y_x)_0 \end{aligned}$$

面内合力与合力矩以及合偶应力表达式为

$$\begin{cases} (N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\ (Y_x, Y_y, Y_{xy}, Y_{yx}) = \int_{-h/2}^{h/2} (m_x, m_y, m_{xy}, m_{yx}) dz \end{cases} \quad (17)$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = n_x \frac{\partial w}{\partial n} - n_y \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{\partial w}{\partial y} = n_y \frac{\partial w}{\partial n} - n_x \frac{\partial w}{\partial s} \end{cases} \quad (18)$$

式中: n 和 s 分别为板边界的法向和切向。将式(18)代入式(16)得

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (p_1 \delta u_0 + p_2 \delta v_0 + p_3 \delta w) dx dy dt + \\ &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega} (p_4 \delta u_0 + p_5 \delta v_0 + p_6 \delta w + q_7 \delta \frac{\partial w}{\partial n} + q_8 \delta \frac{\partial w}{\partial s}) dl dt \end{aligned} \quad (19)$$

式中: $q_7 = n_x p_6 + n_y p_7$; $q_8 = -n_y p_6 + n_x p_7$ 。对于矩形板, 边界为直线, 所以, $\partial w / \partial n = \partial w / \partial s$, 对式(19)进行分部积分可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (p_1 \delta u_0 + p_2 \delta v_0 + p_3 \delta w) dx dy dt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega} [p_4 \delta u_0 + p_5 \delta v_0 + (p_6 - \frac{\partial q_8}{\partial n}) \delta w + q_7 \delta \frac{\partial w}{\partial n}] dl dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i [q_8]_i \delta w_i dt \quad (20)$$

式中: $[q_8]_i$ 为 q_8 在 i 个转角处的跳跃值。

在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内外力虚功为

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt &= \int_{t_1}^{t_2} (\int_V \mathbf{f}^T \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{f}}^T \delta \mathbf{u} d\Omega) dt = \\ &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (f_x \delta u_0 + f_y \delta v_0 + f_z \delta w + c_x \delta \omega_x + c_y \delta \omega_y) dx dy dt + \\ &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega} (\tilde{f}_x \delta u_0 + \tilde{f}_y \delta v_0 + \tilde{f}_z \delta w + \tilde{c}_x \delta \omega_x + \tilde{c}_y \delta \omega_y) dl dt \end{aligned} \quad (21)$$

式中: ω_x 和 ω_y 为转动位移分量; \mathbf{f}^T 为体力; $\tilde{\mathbf{f}}^T$ 为表面力。

$$[f_x, f_y, f_z, c_x, c_y] = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{f}^T dz \quad (22)$$

为体力合力分量; $[\tilde{f}_x, \tilde{f}_y, \tilde{f}_z, \tilde{c}_x, \tilde{c}_y]$ 为沿边界处的外力分量, 令

$$\tilde{M} \delta \frac{\partial w}{\partial n} = \tilde{c}_x \delta \omega_x + \tilde{c}_y \delta \omega_y \quad (23)$$

将式(23)代入式(21)并进行分部积分, 化简得

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [(f_z - \frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x}) \delta w + f_x \delta u_0 + f_y \delta v_0] dx dy dt + \\ &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega} [\tilde{f}_x \delta u_0 + \tilde{f}_y \delta v_0 + \tilde{M} \delta \frac{\partial w}{\partial n} + (\tilde{f}_z + n_y c_x - n_x c_y) \delta w] dl dt \end{aligned} \quad (24)$$

将式(13), (20)和(24)代入式(12), 得

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (S_1 \delta u_0 + S_2 \delta v_0 + S_3 \delta w) dx dy dt + \\ &\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \Omega} (S_4 \delta u_0 + S_5 \delta v_0 + S_6 \delta w + S_7 \delta \frac{\partial w}{\partial n}) dl dt + \\ &\int_{t_1}^{t_2} \sum_i [q_8]_i \delta w_i dt = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

式中: $S_1 = h_1 - p_1 + f_x$; $S_2 = h_2 - p_2 + f_y$; $S_3 = h_3 - p_3 + f_z - \frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x}$; $S_4 = \tilde{f}_x - p_4$; $S_5 = \tilde{f}_y - p_5$; $S_6 = h_4 - p_6 + \tilde{f}_z + n_y c_x - n_x c_y + \frac{\partial q_8}{\partial n}$; $S_7 = \tilde{M} - q_7$; $\partial w / \partial n$ 为转角; w_i 为挠度在第 i 个转角处的跳跃值。对任意的 δu_0 , δv_0 和 δw , 式(25)均成立, 可得运动控制方程:

$$\begin{cases} S_1(x, y, z) = 0 \\ S_2(x, y, z) = 0 \\ S_3(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

和相应的边界条件为

$$\begin{cases} \delta u_0 = 0 \text{ 或 } S_4(x,y,z) = 0, \text{ 在边界 } \partial\Omega \\ \delta v_0 = 0 \text{ 或 } S_5(x,y,z) = 0, \text{ 在边界 } \partial\Omega \\ \delta w = 0 \text{ 或 } S_6(x,y,z) = 0, \text{ 在边界 } \partial\Omega \\ \delta \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ 或 } S_7(x,y,z) = 0, \text{ 在边界 } \partial\Omega \\ \delta w_i = 0 \text{ 或 } \sum_i [q_8]_i = 0, \text{ 在边界 } \partial\Omega \end{cases} \quad (27)$$

将式(6)~(9)代入式(26), 得到位移表示的微分控制方程:

$$\begin{cases} K_{11}^0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_{66}^0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (K_{12}^0 + K_{66}^0) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \\ (K_{12}^1 + 2K_{66}^1) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - K_{11}^1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f_x = \\ m_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - m_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \\ K_{66}^0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + K_{22}^0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (K_{12}^0 + K_{66}^0) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \\ (K_{12}^1 + 2K_{66}^1) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - K_{22}^1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + f_y = \\ m_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - m_1 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \\ K_{11}^1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (K_{21}^1 + 2K_{66}^1) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (K_{12}^1 + 2K_{66}^1) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + \\ K_{22}^1 \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - (K_{11}^2 + l_x^2 K_{55}^0) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (K_{22}^2 + l_y^2 K_{44}^0) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \\ (K_{12}^2 + 4K_{66}^2 + l_x^2 K_{44}^0 + l_y^2 K_{55}^0) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + f_z - \\ \frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_1 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - \\ m_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \end{cases} \quad (28)$$

式中:

$$\begin{cases} K_{ij}^n = \int_{-h/2}^{h/2} z^n K_{ij}(z) dz \\ l_x^2 K_{44}^0 = \int_{-h/2}^{h/2} l_x^2(z) K_{44}(z) dz \\ l_y^2 K_{55}^0 = \int_{-h/2}^{h/2} l_y^2(z) K_{55}(z) dz \end{cases} \quad (29)$$

对于微板在横向分布载荷 $q(x,y)$ 作用下的静态弯曲行为, 忽略式(28)中位移的时间导数项, 可得微板静力学平衡方程为

$$\begin{cases} K_{11}^0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + K_{66}^0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (K_{12}^0 + K_{66}^0) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \\ (K_{12}^1 + 2K_{66}^1) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - K_{11}^1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \\ K_{66}^0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + K_{22}^0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (K_{12}^0 + K_{66}^0) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \\ (K_{12}^1 + 2K_{66}^1) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - K_{22}^1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \\ K_{11}^1 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (K_{21}^1 + 2K_{66}^1) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \\ (K_{12}^1 + 2K_{66}^1) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + K_{22}^1 \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - \\ (K_{11}^2 + l_y^2 K_{55}^0) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (K_{22}^2 + l_x^2 K_{44}^0) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \\ (K_{12}^2 + 4K_{66}^2 + l_x^2 K_{44}^0 + l_y^2 K_{55}^0) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - q = 0 \end{cases} \quad (30)$$

3 微板动力学模型求解

以四边简支微板为例, 如图2所示, 对正交各向异性功能梯度微板弯曲挠度和自由振动频率的尺度效应进行研究。其材料参数 $E_x, E_y, G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}, \rho, l_x$ 和 l_y 均沿板厚方向呈正弦梯度变化, 梯度函数为

$$X(z) = X^s - (X^s - X^c) \sin\left(\frac{2z+h}{2h} \pi\right) \quad (31)$$

式中: 上标 s 表示微板上下表面; 上标 c 表示微板中面,

$$\alpha = \frac{X^s}{X^c} \quad (32)$$

α 为定义的量纲一的功能梯度参数, 当 $\alpha = 1$ 时, 材料模型退化为正交各向异性均质模型。

简支板的边界条件为

$$\begin{cases} v_0 = w = N_x = M_x + Y_{yx} = 0 \quad (x = 0, a) \\ u_0 = w = N_y = M_y - M_{xy} = 0 \quad (y = 0, b) \end{cases} \quad (33)$$

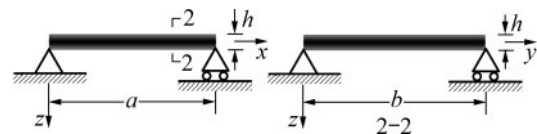


图2 正交各向异性功能梯度简支微板示意图

Fig. 2 Schematic diagram of orthotropic functionally graded simply supported microplate

3.1 微板位移求解

工程中任何形式的载荷均可描述为三角级数的形式, 为了描述微板结构所承受实际载荷的复杂情况, 设作用于微板的载荷函数关系式为

$$q(x,y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (34)$$

设满足式(33)的位移势函数为

$$\begin{cases} u_0(x,y) = \tilde{u} \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\ v_0(x,y) = \tilde{v} \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\ w(x,y) = \tilde{w} \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \end{cases} \quad (35)$$

式中: \tilde{u} , \tilde{v} 和 \tilde{w} 为待定系数。将式(35)代入平衡方程(30), 得

$$\begin{cases} \tilde{u} = \frac{(c_{11}c_{23} - c_{13}c_{22})q_0}{\beta} \\ \tilde{v} = \frac{(c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23})q_0}{\beta} \\ \tilde{w} = \frac{(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})q_0}{\beta} \end{cases} \quad (36)$$

式中:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \left(\frac{K_{11}^0}{a^2} + \frac{K_{66}^0}{b^2} \right) \pi^2; c_{22} = \left(\frac{K_{66}^0}{a^2} + \frac{K_{22}^0}{b^2} \right) \pi^2; c_{12} = c_{21} = \\ &\left(\frac{K_{12}^0 + K_{66}^0}{ab} \right) \pi^2; c_{13} = c_{31} = - \left(\frac{K_{11}^1}{a^3} + \frac{K_{12}^1 + 2K_{66}^1}{ab^2} \right) \pi^3; \\ c_{23} &= c_{32} = - \left(\frac{K_{22}^1}{b^3} + \frac{K_{21}^1 + 2K_{66}^1}{a^2b} \right) \pi^3; c_{33} = \\ &\left(\frac{K_{11}^2 + l_y^2 K_{55}^0}{a^4} + \frac{K_{22}^2 + l_x^2 K_{44}^0}{b^4} + \frac{2K_{12}^2 + 4K_{66}^2 + l_x^2 K_{44}^0 + l_y^2 K_{55}^0}{a^2b^2} \right) \pi^4; \\ \beta &= c_{11}c_{22}c_{33} - c_{11}c_{23}c_{32} - c_{12}c_{21}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + \\ &c_{13}c_{21}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} \end{aligned}$$

将位移表达式(35)代入几何方程(7)和本构方程(9), 可得微板偶应力表达式为

$$\begin{cases} m_x = K_{44}(z) \frac{w_0 \pi^2}{ab} \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\ m_y = K_{55}(z) \frac{w_0 \pi^2}{ab} \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\ m_{xy} = m_{yx} = \left[K_{77}(z) \frac{w_0 \pi^2}{a^2} - \right. \\ \left. K_{66}(z) \frac{w_0 \pi^2}{b^2} \right] \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \end{cases} \quad (37)$$

为了便于分析, 定义量纲一的坐标, 量纲一挠度和量纲一偶应力的表达式为

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{a}, y' = \frac{y}{b}, w' = \frac{w}{h} \\ m_x' = \frac{m_x}{G_{xz}} = 2 \frac{l_x^2}{ab} \tilde{w} \pi^2 \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\ m_y' = \frac{m_y}{G_{yz}} = -2 \frac{l_y^2}{ab} \tilde{w} \pi^2 \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \\ m_{xy}' = m_{yx}' = \frac{m_{xy}}{G_{yz}} = \frac{m_{yx}}{G_{yz}} = \\ \left(\frac{l_y^2}{a^2} - \frac{G_{xz}}{G_{yz}} \frac{l_x^2}{b^2} \right) \tilde{w} \pi^2 \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \end{cases} \quad (38)$$

3.2 微板固有频率求解

基于 Navier 法, 将满足微板边界条件式(33)的位移函数描述为双三角级数解的形式:

$$\begin{cases} u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_{mk} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{ipt} \\ v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{v}_{mk} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{ipt} \\ w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{w}_{mk} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{ipt} \end{cases} \quad (39)$$

式中: p 为板的固有频率; i 为虚数单位, $i^2 = -1$ 。 $\alpha = m\pi/a$; $\beta = k\pi/b$; $\hat{u} = [\hat{u}_{mk}, \hat{v}_{mk}, \hat{w}_{mk}]$ 为待定系数。将式(39)代入位移表示的运动控制方程式(28)得

$$(\mathbf{D} - p^2 \mathbf{M}) \hat{\mathbf{u}}^T = \mathbf{0} \quad (40)$$

式中: \mathbf{D} 为刚度矩阵, 矩阵中各元素表示为

$$\begin{aligned} d_{11} &= K_{11}^0 \alpha^2 + K_{66}^0 \beta^2; d_{12} = d_{21} = (K_{12}^0 + K_{66}^0) \alpha \beta; d_{13} = \\ d_{31} &= -K_{11}^1 \alpha^3 - (K_{12}^1 + 2K_{66}^1) \alpha \beta^2; d_{22} = K_{66}^0 \alpha^2 + K_{22}^0 \beta^2; \\ d_{23} &= d_{32} = -(K_{12}^1 + 2K_{66}^1) \alpha^2 \beta - K_{22}^1 \beta^3; \\ d_{33} &= K_{11}^2 \alpha^4 + (2K_{12}^2 + 4K_{66}^2) \alpha^2 \beta^2 + K_{22}^2 \beta^4 + \\ &l_x^2 K_{44}^0 (\alpha^2 \beta^2 + \beta^4) + l_y^2 K_{55}^0 (\alpha^2 + 4\alpha^2 \beta^2) \end{aligned}$$

\mathbf{M} 为板的质量矩阵, 矩阵中各元素表示为

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_0; m_{12} = m_{21} = 0; m_{13} = m_{31} = -m_1 \alpha; m_{23} = \\ m_{32} &= -m_1 \beta; m_{33} = m_0 + m_2 (\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

由于待定系数 \hat{u} 的取值具有任意性, 故求固有频率 p 可以转化为求刚度矩阵对质量矩阵的广义特征值。为了便于分析, 将微板量纲一固有频率的表达式定义为

$$p_{mk}' = p_{mk} h \sqrt{\frac{\rho^s}{E_y^s}} \quad (41)$$

4 数值结果与讨论

据上述力学模型，对正交各向异性功能梯度简支微板前三阶固有频率以及其在双向正弦载荷作用下的挠度和偶应力进行数值计算。其材料参数如表 1 所示，载荷参数 $q_0=1\ 000\ \text{MPa}$ ，微板的结构尺寸为 $h=0.025\ \text{mm}$ ， $a/h=10$ ， $a=b$ 。

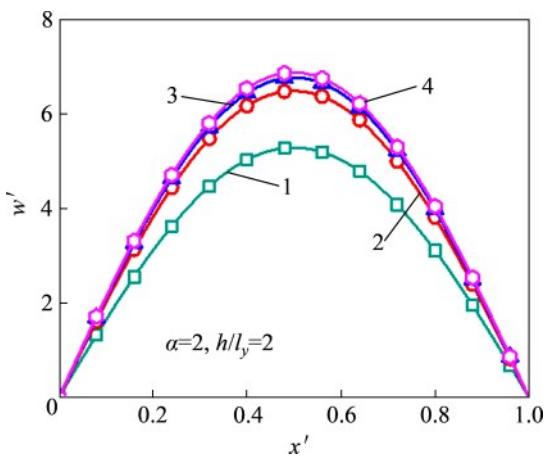
表 1 正交各向异性功能梯度微板材料参数^[23]

Table 1 Material parameters of orthotropic functionally gradient microplate^[23]

E_x^s/GPa	E_y^s/GPa	μ_{xy}	μ_{yx}	G_{xy}^s/GPa	G_{xz}^s/GPa	G_{yz}^s/GPa	$\rho^s/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$
4.32	1.44	0.3	0.012	0.72	0.72	0.288	1.22

4.1 挠度分析

图 3 所示为 h/l_x 取值不同时，微板在 $y=b/2$ 处截面的量纲一的挠度沿 x 方向的分布曲线。从图 3 可以看出：微板沿 x 方向的挠曲线均呈正弦分布，且最大挠度出现在微板中间位置。



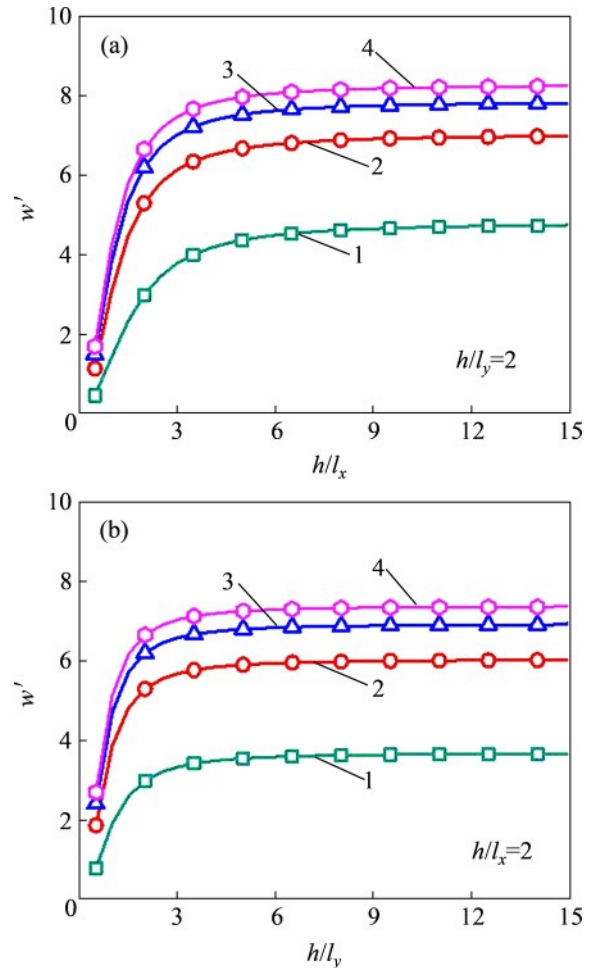
1— $h/l_x=2$; 2— $h/l_x=4$; 3— $h/l_x=6$; 4— $h/l_x=8$ 。

图 3 不同 h/l_x 下微板沿 x 方向的量纲一的挠度 w' 分布

Fig. 3 Dimensionless deflection of microplate with different h/l_x

图 4(a) 所示为不同功能梯度参数下，微板中心量纲一的挠度随 h/l_x 的变化曲线。从图 4(a) 可以看出：当 h/l_x 小于 5 时，微板量纲一的挠度较小，微板挠度具有明显的尺度效应；随着 h/l_x 增大，微板量纲一的挠度逐渐增大，但增大程度逐渐减缓，表明 h/l_x 对微板沿 x 方向挠曲线的影响逐渐减弱；

当 h/l_x 大于 10 时，微板最大量纲一的挠度基本保持恒定，微板挠度的尺度效应消失。



(a) 微板最大量纲一的挠度随 h/l_x 的变化曲线；
(b) 微板最大量纲一的挠度随 h/l_y 的变化曲线
1— $\alpha=1$; 2— $\alpha=2$; 3— $\alpha=3$; 4— $\alpha=4$ 。

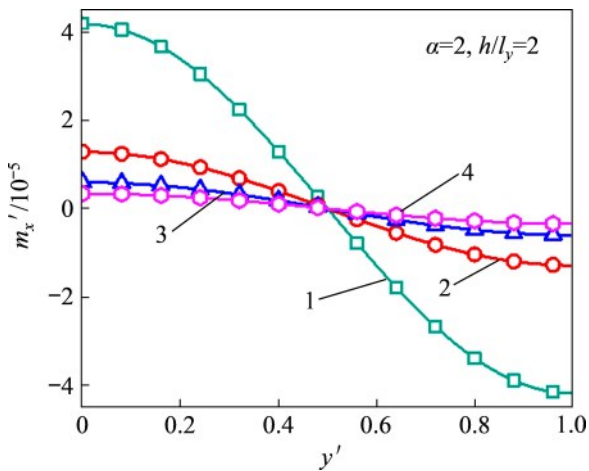
图 4 不同功能梯度参数下微板最大量纲一的挠度 w' 变化曲线

Fig. 4 Maximum dimensionless deflection of microplate with different functionally graded parameters

图 4(b) 所示为不同功能梯度参数下，微板中心最大量纲一的挠度随 h/l_y 的变化曲线。从图 4(b) 可以看出：当功能梯度参数较小时，微板最大量纲一的挠度较小；随着功能梯度参数增大，微板最大量纲一的挠度逐渐增大，但增大程度逐渐减缓，表明功能梯度参数对微板挠度的影响逐渐减弱。除此之外，通过对图 4(a) 和 4(b) 进行对比可以发现， h/l_y 也是影响微板挠度尺度效应的重要因素，但沿 2 个正交方向的材料尺度参数对微板挠度的尺度效应影响程度不同。

4.2 偶应力分析

图5所示为 h/l_x 取值不同时, 微板量纲一的偶应力 m_x' 在 $x=a/2$ 处截面沿 y 方向的变化曲线。从图5可以看出: 微板量纲一的偶应力 m_x' 均沿 y 方向呈余弦分布, 且最大偶应力出现在微板边界位置, 中心处偶应力为零。



1— $h/l_x=2$; 2— $h/l_x=4$; 3— $h/l_x=6$; 4— $h/l_x=8$ 。

图5 不同 h/l_x 下微板量纲一的偶应力 m_x' 分布曲线

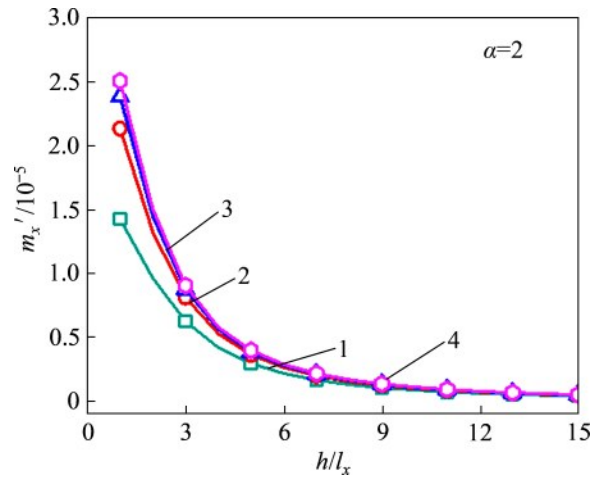
Fig. 5 Dimensionless couple stress of microplate with different h/l_x

图6所示为 h/l_y 取值不同时, 微板最大量纲一的偶应力 m_x' 随 h/l_x 变化曲线。从图6可以看出: 当 h/l_x 小于5时, 微板量纲一的偶应力较大, 微板最大量纲一的偶应力 m_x' 随板厚与材料尺度参数比变化明显, 具有明显的尺度效应。随着 h/l_x 增大, 量纲一的偶应力逐渐减小, 但减小程度逐渐减缓, 表明 h/l_x 对微板偶应力的影响逐渐减弱; 当 h/l_x 大于12时, 微板偶应力趋于0, 尺度效应消失。

图7所示为不同功能梯度参数情况下, 微板最大量纲一的偶应力 m_x' 随 h/l_x 的变化曲线。从图7可以看出: 当功能梯度参数较小时, 微板最大量纲一的偶应力 m_x' 较大, 随着功能梯度参数增大, 微板偶应力逐渐减小, 但减小程度逐渐减缓, 表明功能梯度参数对微板偶应力的影响逐渐减弱。

4.3 固有频率分析

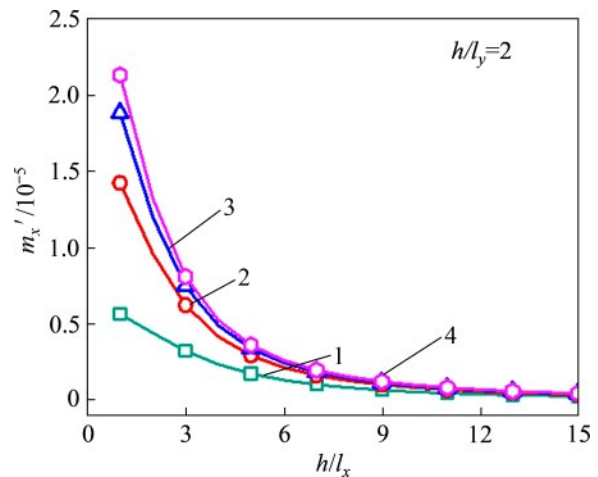
图8(a)所示为 h/l_y 取值不同时, 微板一阶量纲一的固有频率随 h/l_x 变化曲线。从图8(a)可以看出: 微板一阶量纲一的固有频率随 h/l_x 的增大而减小; 当 h/l_x 小于5时, 微板一阶量纲一的固有频率随 h/l_x 变化明显; 当 h/l_x 大于10时, 微板一阶量纲一的固有频率趋于稳定值, 其尺度效应消失。



1— $h/l_y=2$; 2— $h/l_y=4$; 3— $h/l_y=6$; 4— $h/l_y=8$ 。

图6 不同 h/l_y 下微板最大量纲一的偶应力 m_x' 随 h/l_x 的变化曲线

Fig. 6 Maximum dimensionless couple stress of microplate vs. h/l_x for different dimensionless thickness h/l_y



1— $\alpha=1$; 2— $\alpha=2$; 3— $\alpha=3$; $\alpha=4$ 。

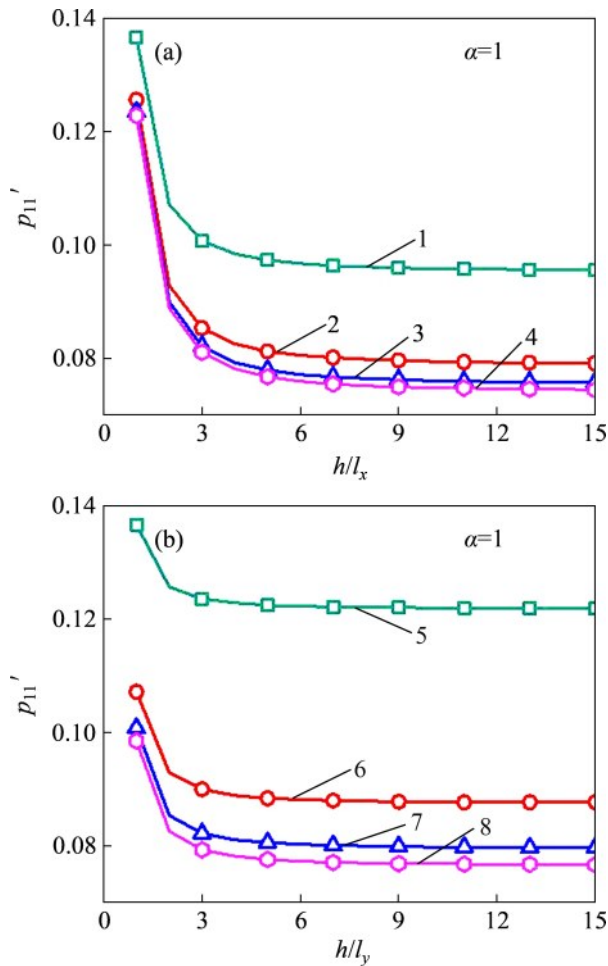
图7 不同功能梯度参数下微板最大量纲一的偶应力 m_x' 随 h/l_x 的变化曲线

Fig. 7 Maximum dimensionless couple stress of microplate vs. h/l_x with different functionally graded parameters

有频率趋于稳定值, 其尺度效应消失。

图8(b)所示为 h/l_x 取值不同时, 微板一阶量纲一的固有频率随 h/l_y 变化曲线。从图8(b)可以看出: 微板一阶量纲一的固有频率随 h/l_y 的增大而减小; 当 h/l_y 小于3时, 微板一阶量纲一的固有频率随 h/l_y 变化明显; 当 h/l_y 大于6时, 微板一阶固有频率趋于稳定值, 其尺度效应消失。除此之外, 通过对图8(a)和8(b)进行对比可以印证, 沿2个正交方向

的材料尺度参数对微板一阶固有频率的影响不同。

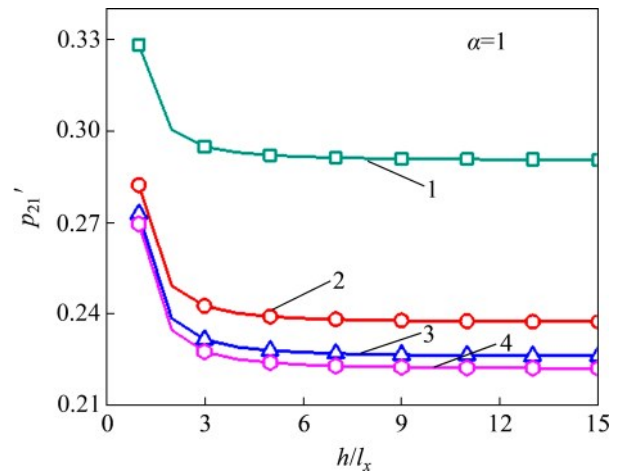


(a) 不同 h/l_y 下一阶量纲一的固有频率随 h/l_x 的变化曲线;
 (b) 不同 h/l_x 下一阶量纲一的固有频率随 h/l_y 的变化曲线
 1— $h/l_y=2$; 2— $h/l_y=4$; 3— $h/l_y=6$; 4— $h/l_y=8$; 5— $h/l_x=1$;
 6— $h/l_x=3$; 7— $h/l_x=5$; 8— $h/l_x=7$ 。

图 8 微板一阶量纲一的固有频率 p'_{11} 的变化曲线
Fig. 8 Curves of dimensionless first order natural frequency of microplate

图 9 所示为 h/l_y 取值不同时, 微板二阶量纲一的固有频率随 h/l_x 变化曲线。从图 9 可以看出: 微板二阶量纲一的固有频率随 h/l_x 的增大而减小; 当 h/l_x 小于 5 时, 微板二阶量纲一的固有频率随板厚与材料尺度参数比变化明显; 当 h/l_x 大于 10 时, 微板二阶固有频率趋于稳定值, 其尺度效应消失。

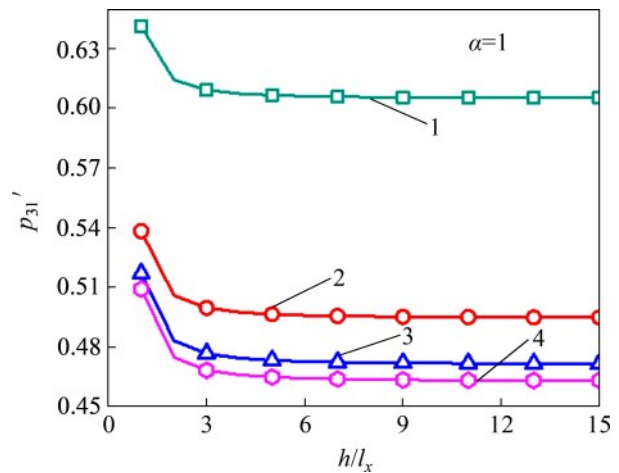
图 10 所示为 h/l_y 不同时, 微板三阶量纲一的固有频率随 h/l_x 变化曲线。从图 10 可以看出: 微板三阶量纲一的固有频率随 h/l_x 的增大而减小, 当 h/l_x 小于 5 时, 微板三阶量纲一的固有频率随板厚与材料



1— $h/l_y=1$; 2— $h/l_y=3$; 3— $h/l_y=5$; 4— $h/l_y=7$ 。

图 9 微板二阶量纲一的固有频率 p'_{21} 随 h/l_x 的变化曲线

Fig. 9 Dimensionless second order natural frequency of microplate vs. h/l_x



1— $h/l_y=1$; 2— $h/l_y=2$; 3— $h/l_y=3$; 4— $h/l_y=4$ 。

图 10 微板三阶量纲一的固有频率 p'_{31} 随 h/l_x 的变化曲线

Fig. 10 Dimensionless third order natural frequency of microplate vs h/l_x

尺度参数比变化明显; 当 h/l_x 大于 10 时, 微板三阶固有频率趋于稳定值, 其尺度效应消失。

图 11 所示为不同功能梯度参数下, 微板一阶量纲一的固有频率随 h/l_x 的变化曲线。从图 11 可以看出: 当功能梯度参数较小时, 微板一阶量纲一的固有频率较大; 随着功能梯度参数增大, 微板一阶量纲一的固有频率逐渐减小并逐渐趋于稳定值, 表明功能梯度参数对微板固有频率的影响逐渐减弱。

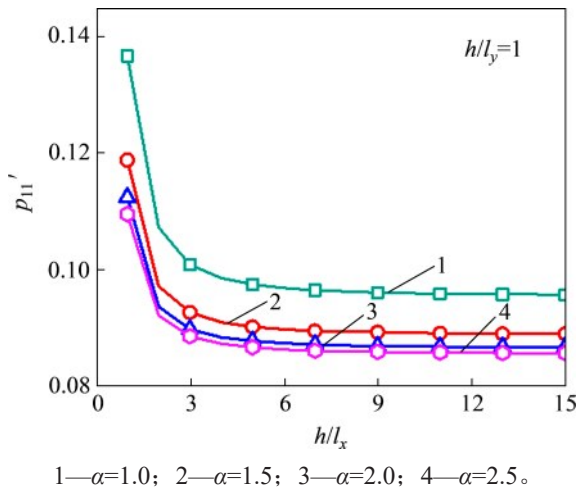


图 11 不同功能梯度参数下微板一阶量纲一的固有频率 p'_{11} 随 h/l_x 变化曲线

Fig. 11 Dimensionless first order natural frequency of microplate vs. dimensionless thickness h/l_x with different functionally graded parameters

5 结论

1) 板厚与材料尺度参数比越小, 微板挠度、偶应力和前三阶固有频率的尺度效应越明显; 当板厚与材料尺度参数比大于 10, 微板挠度、偶应力和前三阶固有频率的尺度效应可以忽略不计。

2) 沿 2 个正交方向的材料尺度参数对微板挠度、偶应力和固有频率的尺度效应影响程度不同。

3) 功能梯度参数对微板挠度、偶应力和前三阶固有频率的尺度效应有一定影响, 且随着功能梯度参数增大, 功能梯度参数对微板挠度、偶应力和固有频率的影响逐渐减弱。

参考文献:

- [1] 薛立军, 兑关锁, 刘兵飞. 功能梯度形状记忆合金梁纯弯曲的理论分析[J]. 机械工程学报, 2012, 48(22): 40-45.
XUE Lijun, DUI Guansuo, LIU Bingfei. Theoretical analysis of functionally graded shape memory alloy beam subjected to pure bending[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(22): 40-45.
- [2] NAEBE M, SHIRVANIMOGHADDAM K. Functionally graded materials: a review of fabrication and properties[J]. Applied Materials Today, 2016, 5: 223-245.
- [3] 康泽天, 周博, 薛世峰. 功能梯度形状记忆合金复合梁的力学行为[J]. 复合材料学报, 2019, 36(8): 1901-1910.
KANG Zetian, ZHOU Bo, XUE Shifeng. Mechanical behaviors of functionally graded shape memory alloy composite beam[J]. Acta Materialia Composite Sinica, 2019, 36(8): 1901-1910.
- [4] KOUZELI M, MORTENSEN A. Size dependent strengthening in particle reinforced aluminium[J]. Acta Materialia, 2002, 50(1): 39-51.
- [5] LAM D C C, YANG F, CHONG A C M, et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2003, 51(8): 1477-1508.
- [6] YANG F, CHONG A C M, LAM D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity[J]. International Journal of Solids & Structures, 2002, 39(10): 2731-2743.
- [7] ASGHARI M, AHMADIAN M T, KAHROBAIYAN M H, et al. On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams[J]. Materials and Design, 2010, 31(5): 2324-2329.
- [8] KE Liaoliang, WANG Yuesheng. Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory[J]. Composite Structures, 2011, 93(2): 342-350.
- [9] REDDY J N. Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams[J]. Journal of the Mechanics & Physics of Solids, 2011, 59(11): 2382-2399.
- [10] DEHROUYEH-SEMNANI A M, NIKKHAH-BAHRAMI M. The influence of size-dependent shear deformation on mechanical behavior of microstructures-dependent beam based on modified couple stress theory[J]. Composite Structures, 2015, 123: 325-336.
- [11] DAI H L, WANG Y K, WANG L. Nonlinear dynamics of cantilevered microbeams based on modified couple stress theory[J]. International Journal of Engineering Science, 2015, 94: 103-112.
- [12] TSIATAS G C. A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory[J]. International Journal of Solids & Structures, 2009, 46(13): 2757-2764.
- [13] KE Liaoliang, WANG Yuesheng, YANG Jie, et al. Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(1): 94-106.
- [14] KE Liaoliang, YANG Jie, KITIPORNCHAI S, et al. Bending, buckling and vibration of size-dependent functionally graded annular microplates[J]. Composite Structures, 2012, 94(11): 3250-3257.
- [15] THAI H T, CHOI D H. Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory[J]. Composite Structures, 2013, 95(1): 142-153.

- [16] LOU Jia, HE Liwen, DU Jianke. A unified higher order plate theory for functionally graded microplates based on the modified couple stress theory[J]. *Composite Structures*, 2015, 133: 1036–1047.
- [17] CHEN Wanji, LI Xiaopeng. A new modified couple stress theory for anisotropic elasticity and microscale laminated Kirchhoff plate model[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2014, 84(3): 323–341.
- [18] 陈万吉, 任鹤飞. 基于新修正偶应力理论的Mindlin层合板自由振动分析[J]. *工程力学*, 2016, 33(12): 31–43.
CHEN Wanji, REN Hefei. Free vibration analysis of a laminated composite Mindlin plate based on new modified couple stress theory[J]. *Engineering Mechanics*, 2016, 33(12): 31–43.
- [19] 陈万吉, 牛惠. 基于新修正偶应力理论的Mindlin层合板稳定性分析[J]. *计算力学学报*, 2016, 33(5): 717–724.
CHEN Wanji, NIU Hui. Buckling analysis of composite laminated Mindlin plate based on new modified couple stress theory[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, 33(5): 717–724.
- [20] 贺丹, 杨子豪. 基于一种新修正偶应力理论的平面正交各向异性功能梯度梁静弯曲模型及尺度效应[J]. *复合材料学报*, 2017, 34(4): 538–544.
HE Dan, YANG Zihao. Static bending model and size effect of plane orthotropic functionally graded beam based on a new modified couple stress theory[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2017, 34(4): 538–544.
- [21] 贺丹, 杨万里. 基于新修正偶应力理论的斜交铺设层合Kirchhoff板模型与尺度效应[J]. *复合材料学报*, 2016, 33(6): 1311–1317.
HE Dan, YANG Wanli. Model of angle-ply laminate Kirchhoff plate based on new modified couple stress theory and scale effects[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2016, 33(6): 1311–1317.
- [22] YANG Zihao, HE Dan. A microstructure-dependent plate model for orthotropic functionally graded micro-plates[J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2019, 26(14): 1218–1225.
- [23] YANG Zihao, HE Dan. Vibration and buckling of orthotropic functionally graded micro-plates on the basis of a re-modified couple stress theory[J]. *Results in Physics*, 2017, 7: 3778–3787.

(编辑 杨幼平)